/ /

مثال ١: مجموعة الأعداد الطبيعية N تحت علاقة الترتيب الطبيعي هي مجموعة مرتبة جيداً" في حين أن مجموعة الأعداد الصحيحة تحت علاقة الترتيب نفسها هي علاقة غير مرتبة جيداً".

مثال ٢: $(\mathbb{R}, \leq)$ حيث $\leq$ الترتيب الطبيعي.

لتكن. $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;;\; n \in Z^{+}\}$

أوجد $\sup$ ، $\inf$ لهذه المجموعة.

الحل: $\sup A = 1 \quad , \quad \inf A = 0$

الثلاثاء 2017/10/17 — المحاضرة الثالثة

المورفيزم والإيزومورفيزم الترتيبيات:

تعريف ١: إذا كانت f دالة من المجموعة المرتبة جزئياً $(M, \leq)$ في المجموعة المرتبة جزئياً $(M', \leq')$. نقول عن هذه الدالة $f: (M, \leq) \longrightarrow (M', \leq')$ أنها مورفيزم ترتيبي (دالة تزايدية) إذا كان

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y) \quad ; \quad \forall x, y \in M$$

وإذا كانت بالإضافة إلى ذلك f تباين و f^{-1} مورفيزم ترتيبي فإننا نسمي f في هذه الحالة إيزومورفيزم ترتيبي.

٢ - ونقول عن الدالة السابقة f أنها مورفيزم عاكس للترتيب (دالة متناقصة) إذا تحقق الشرط

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq' f(y) \quad ; \quad \forall x, y \in M$$

وبالإضافة إلى كون f عاكس للترتيب، كان f متبايناً و f^{-1} مورفيزم عاكس للترتيب فإننا نسمي f عندئذٍ إيزومورفيزم عاكس الترتيب.

تمرين: لتكن f دالة معرفة بالشكل

$$f: (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$$

$$f(x) = x^3 + 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

بيِّن أن f هو إيزومورفيزم ترتيبي.

مبرهنة: إذا كان f إيزومورفيزم ترتيبي للمجموعة المرتبة جزئياً $(M, \leq)$ في المجموعة $(M', \leq')$. وكان للمجموعة الجزئية A من M حداً أعلى أصغرياً هو العنصر a . عندها فإن $f(a)$ هي حد أعلى أصغري (sup) للمجموعة $f(A)$.

البرهان: نبرهن أولاً أن $f(a)$ هو حد أعلى ثم نبرهن أنه أصغر الحدود العليا:

1- ليكن y اختياري من $f(A)$ ومنه فإنه يوجد عنصر $x \in A$ بحيث $y = f(x)$ وبما أن a هو حد أعلى أصغري فرضاً فإن $x \leq a$ وبما أن f دالة متزايدة فإن $y = f(x) \leq f(a)$ هذا يعني أن $f(a)$ هو حد أعلى.

2- لنفرض d حد أعلى آخر للمجموعة $f(A)$ وبما أن f إيزومورفيزم ترتيبي، فإنه يوجد عنصر $t \in M$ بحيث أن $f(t) = d$ ومنه فإن $f(x) \leq f(t)$ وبالتالي $x \leq t$ وذلك لكل $x \in A$. وهذا يعني أن t هو حد أعلى للمجموعة A وحسب الفرض فإن $a \leq t$ لأن a هو أصغر الحدود العليا وبما أن f إيزومورفيزم ترتيبي فإن $f(a) \leq f(t) = d$. وهذا يعني أن $f(a) = \sup f(A)$

الفصل الثاني : الشبكات

تعريف : نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً $(E, \leq)$ أنها شبكة . إذا كان لكل مجموعة جزئية منها مكونة من عنصرين يوجد حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي ينتمي إليها

$\sup\{a,b\} = a \vee b$

$\inf\{a,b\} = a \wedge b$

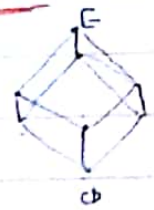
يرمز للشبكة دوماً $(E, \leq, \vee, \wedge)$

مثال ١ : المجموعة $E = \{a,b,c\}$ ، $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cup, \cap)$

إذا أخذنا العنصرين $\{\{a\}, \{b\}\}$

$\{a\} \vee \{b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$

مخطط هاس



مثال ٢ : المجموعة $(\mathbb{N}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة القسمة

$a \leq b \iff a | b$

والمجموعة $(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة .

$a \vee b = l.c.m(a,b)$ المضاعف المشترك الأصغر

$a \wedge b = gcd(a,b)$ القاسم المشترك الأكبر

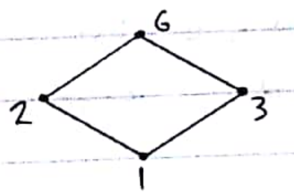
l.c.m : little common multiable

g.c.d : greatest common diveser

مثال ٣ : أوجد المجموعات $D(6)$ ، $D(20)$ ، $D(30)$

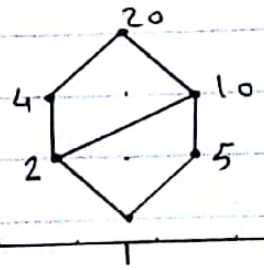
الحل : شبكة $(D(6), \leq, \vee, \wedge)$ ، $D(6) = \{1,2,3,6\}$

مخطط هاس لـ $D(6)$:



شبكة $(D(20), \leq, \vee, \wedge)$. $D(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$

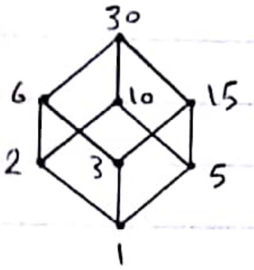
مخطط هاس :



/ /

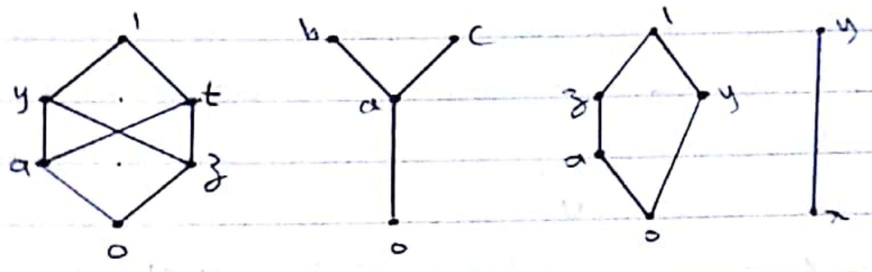
$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ، $(D(30), \leq, \vee, \wedge)$

مخطط هاس:

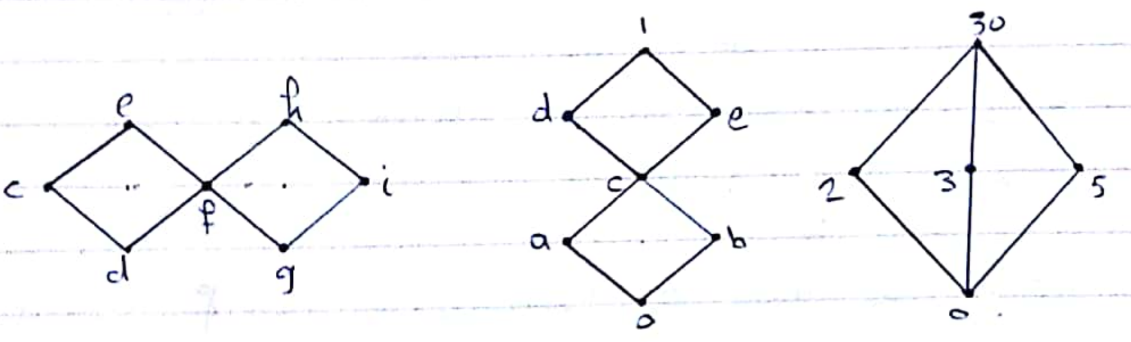


مثال 4: إذا كانت $(G,.)$ زمرة ما، ولتكن E مجموعة جميع الزمر الجزئية من G تحت علاقة الاحتواء. إن المجموعة $(E, \subseteq)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً. كما أن تقاطع أي زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية، وبالتالي هذا التقاطع هو الحد الأدنى الأعظمي، كما أن الحد الأعلى الأصغري هو الزمرة الجزئية المولدة باجتماع زمرتين جزئيتين. عندها نستطيع القول أن $(E, \subseteq, \vee, \wedge)$ تشكل شبكة الزمر الجزئية للزمرة G.

مثال: بين أي من المخططات التالية تشكل شبكات وأي منها لا تشكل.

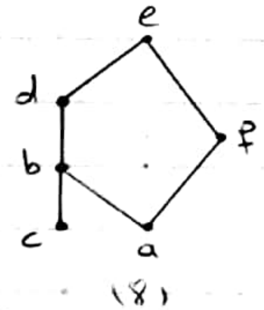


(4) (3) (2) (1)



(7) (6) (5)

/ /



(1) تشكل شبكة.

(2) تشكل شبكة.

(3) لا تشكل شبكة لأن: $a \vee b$ غير موجود.

(4) لا تشكل شبكة لأن إذا أخذنا العنصرين t, y نجد أن لهما عنصرين inf هما a, z وهذا غير ممكن

(5) تشكل شبكة (6) تشكل شبكة.

(7) لا تشكل شبكة لأن إذا أخذنا العنصرين e, h لا يوجد لهما sup.
أي $e \vee h$ غير موجود

(8) لا تشكل شبكة لأن $c \wedge a$ غير موجود.

خواص الشبكات

مبرهنة: إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ما عندئذ فإن عناصرها تحقق:

1- خاصية اللاعنو: $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$

2- الخاصية التبديلية: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$

3- الخاصية التجميعية: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

4- خاصية الامتصاص: $x \wedge (x \vee y) = x$

$x \vee (x \wedge y) = x$

البرهان: 1- إن $x \wedge x \leq x$ وكذلك $x \leq x$ «كل عنصر يرتبط بنفسه»

⇐ $x \leq x \wedge x$ ⇐ $x = x \wedge x$

2- $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$

3- $\underbrace{x \wedge (y \wedge z)}_{a} = \underbrace{(x \wedge y) \wedge z}_{b}$

$a = x \wedge (y \wedge z) \Rightarrow a \leq x \ \& \ a \leq y \wedge z \Rightarrow a \leq x \ \& \ a \leq y \ \& \ a \leq z$

$a \leq x \ \& \ a \leq y \Rightarrow a \leq x \wedge y \ \& \ a \leq z \Rightarrow a \leq (x \wedge y) \wedge z = b$

$\Rightarrow a \leq b \quad \cdots (1)$

/ /

وبنفس الطريقة نثبت أن $b \leq a$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج المساواة.

4- لنبرهن أن: $x \wedge (x \vee y) \leq x$ ... (1)

وبما أن $x \leq x$ و $x \leq x \vee y$

هذا يكون x هو حد أدنى للعنصرين $x, x \vee y$ ومنه:

$x \leq x \wedge (x \vee y)$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج المساواة.

مبرهنة: لتكن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ ، a,b عنصرين ما من الشبكة.

عندئذ يكون:

1- $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$

2- $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$

البرهان: واجب.